EPFL

1. Généralités :

1.1 Equations de Maxwell :

$$\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

H = Champ magnétique [A/m]

j = Densité de courant $[A/m^2]$

D = Déplacement électrique

→ Si haute fréquence $\geq 100\,kHz$.

Donc :
$$\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$$
$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{div}\,\vec{B} = 0$$
$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

B : Champ d'induction magnétique $[T]$
(Densité de flux magnétique)
(Flux density)

E : Champ électrique $[V/m]$

μ : perméabilité magnétique $\left[\frac{Vs}{Am}\right]$

↳ caractérise un "bon" ou "mauvais" conducteur magnétique.

μ_0 = cste du vide = $2{,}56 \cdot 10^{-6}$ [VS/Am]

= $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$

$\mu_{fer} \neq \mu_0$ [10 .... 10000 μ_0]

Démarche analytique :

a) Modèle de Maxwell :

→ Analyse $\vec{H} \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{F}$

b) Modèle de Kirchhoff :

→ Analyse en circuit → $\vec{F}$

1.2 Analogie Electrique - Magnétique :

Electrique	Magnétique
Densité de courant : J [A/m²]	Densité de Flux : B [T]
$i = \int_S j \, ds$	$\underset{\text{Flux}}{\underline{\Phi}} = \int_S B \, ds$ [Vs] [Wb]
$\operatorname{div} \vec{J} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

côté électrique : Tension / Potentiel

$$U_{12} = \int_1^2 E \, dl = \int_1^2 \underset{\text{résistivité}}{\rho} \cdot \underset{\text{densité de courant}}{J} \, dl$$

$$= \int_1^2 \frac{\rho \cdot j \cdot S}{S} \, dl = i \underbrace{\int_1^2 \frac{\rho \cdot dl}{S}}_{R_{12}}$$

$$U_{12} = R_{12} \cdot i$$

côté magnétique :

$$\vec{Rot}\ \vec{H} = \vec{J}$$

$\downarrow$ Navier - Stokes

1 degré de liberté.

$$\underbrace{\oint H\, dl}_{\text{Potentiel magnétique}} = \underbrace{\int_S j\, ds}_{\text{Potentiel magnétique}} = Ni = \Theta$$

$\uparrow$ nb de spires

$B = \mu \cdot H$

$$\Theta_{12} = \int_1^2 H\, dl = \int_1^2 \frac{B}{\mu}\, dl$$

$$= \int_1^2 \frac{B \cdot S}{\mu \cdot S}\, dl = \Phi \underbrace{\int_1^2 \frac{dl}{\mu \cdot S}}$$

Réluctance Magnétique.

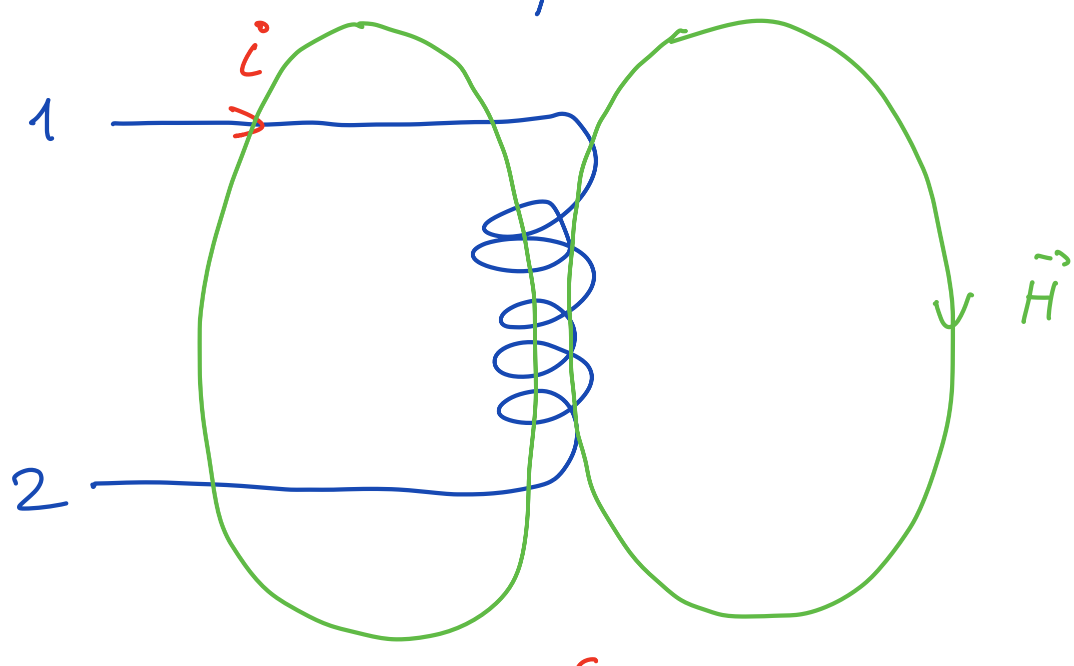
Définition: $R_m = \int_l \frac{dl}{\mu \cdot S}$

$\Rightarrow \quad \Theta_{12} = R_m \cdot \Phi$ (Loi d'Ohm]

$$0 < R \leq \underline{\underline{R_{max}}}$$

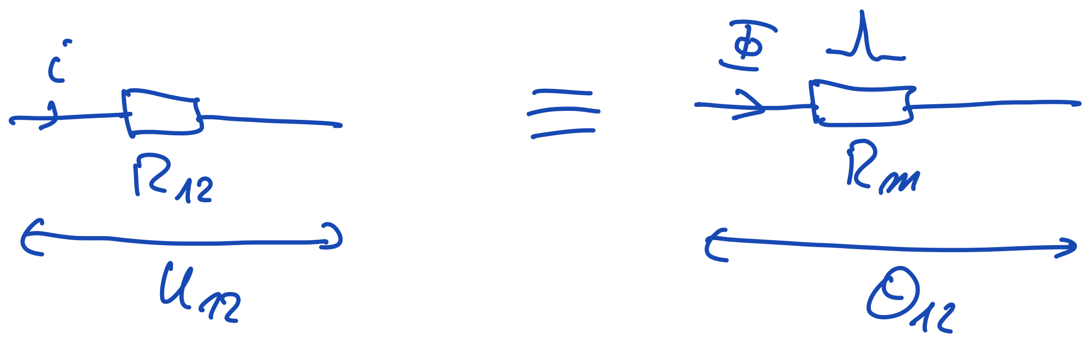
Définition: Λ (lamda) $= \frac{1}{R_m} = \int \frac{\mu \cdot ds}{l}$

Perméance Magnétique

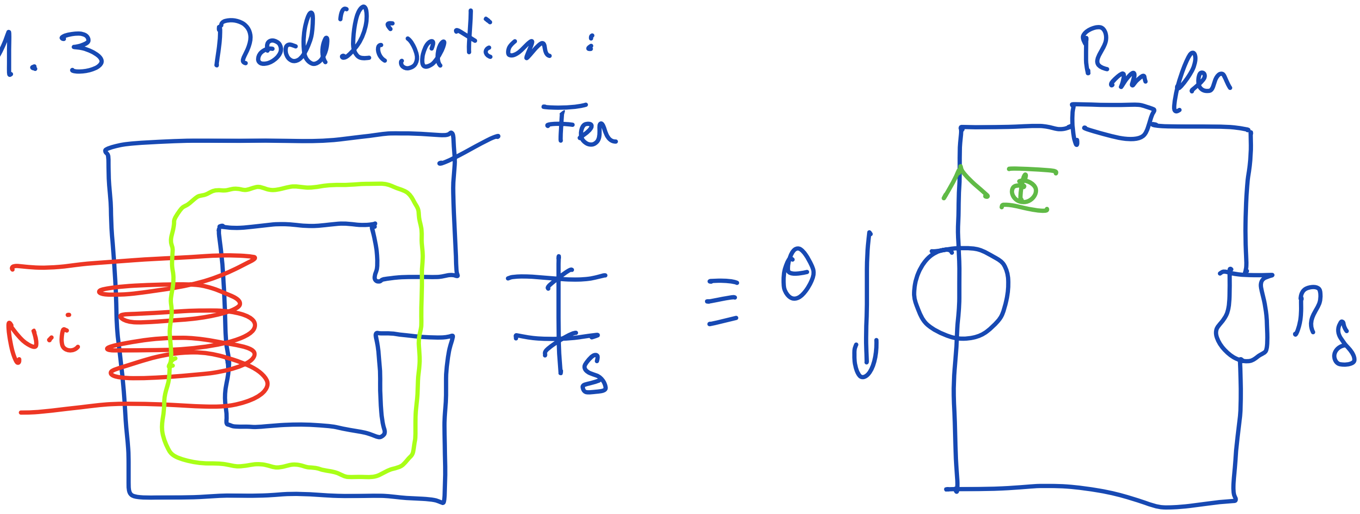


$$\Theta = N \cdot i = \int H \, dl = R_m \cdot \Phi$$

Symbole :



1.3 Modélisation :



Avantages : On connaît la manière de résoudre

Thévenin, Norton, $\lambda - \Delta$

Superposition → Si linéaire !!

1.4 Mise en série et // des Réluctances et perméances :

En série $\mathcal{R}_{m\,eq} = \Sigma\, \mathcal{R}_m$

// $\mathcal{R}_{m\,eq} = \frac{1}{\Sigma\ \ldots}$

$$\sum \frac{1}{R_m}$$

En série $\Lambda_{eq} = \dfrac{1}{\sum \frac{1}{\Lambda}}$

// $\Lambda_{eq} = \sum \Lambda$

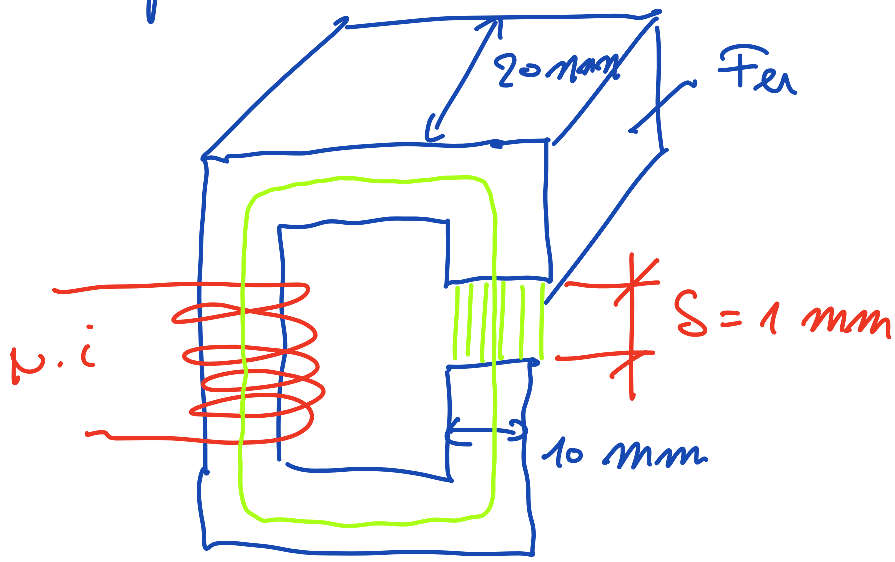
1.5 Résumé :

Électrique		Magnétique	
R	$[\Omega]$	R_m	$[1/H]$
Y	$[1/\Omega]$	Λ	$[H]$ (Henry)
I	$[A]$	Φ	$[Vs, Wb]$
U	$[V]$	Θ	$[A]$

$U = R \cdot i$	$\Theta = R_m \cdot \Phi$
J	B
E	H
$\operatorname{div} J = 0$	$\operatorname{div} B = 0$
$i_1 = i_2$	$\Phi_1 = \Phi_2$

$$U_{12} = \int_1^2 E \, dl \qquad \Theta_{12} = \int_1^2 H \, dl$$

Exemple :



$N = 200$

$i = 2A$

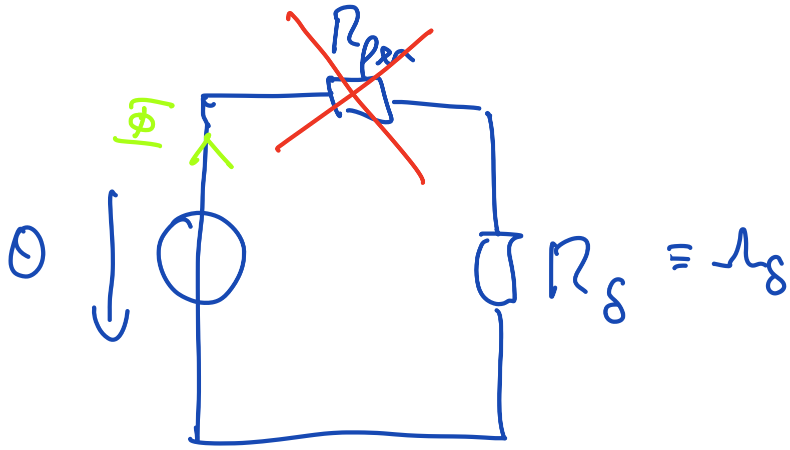
Φ_δ ? B_δ ?

Hypothèse : fer bon conducteur

$\mu_{fer} \to \infty$

$$\Phi_{tot} = \Phi_\delta = \Lambda_\delta \cdot \Theta$$

$$\Theta = R_m \cdot \Phi_\delta$$



$$R_\delta = R_{air} = \int_l \frac{dl}{\mu \cdot S} = \frac{l}{\mu \cdot S}$$

$$l = \delta$$

$$S = 10 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}.$$

$$\mu = \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$$

$$= \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 3.98 \cdot 10^{6} \, [1/H]$$

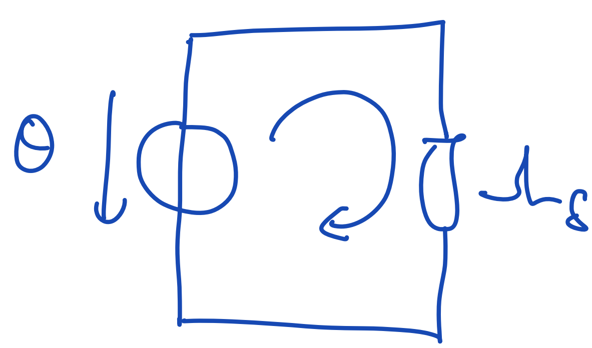
$$\Lambda_{air} = \frac{1}{R_\delta} = 2{,}5 \cdot 10^{-7} \, [H]$$

$$\Phi_\delta = \Lambda \cdot \Theta = 2{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 2$$

$$= 1 \cdot 10^{-4} \, [Vs, Wb]$$

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{0{,}5 \text{ T}}}$$

Autre méthode :



$$\oint H\,dl = \Theta = N \cdot i$$

$$H_\delta \cdot \delta = N \cdot i$$

$$\downarrow$$

$$\frac{B_\delta}{\mu_0} \rightarrow \frac{B_\delta}{\mu_0} \cdot \delta = N \cdot i$$

$$B_\delta = \frac{N \cdot i\,\mu_0}{\delta}$$

$$= 0{,}5\ T$$

1.6 Définition du Flux totalisé :

$$\overrightarrow{Rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\downarrow$ N.S. 1 degré de liberté :

$$\oint E\,dl = \int_S -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

Si système indéformable →

$$\oint E\,dl = -\int_S \frac{dB}{dt} \cdot ds$$

$$= -\frac{d}{dt}\int_S B \cdot ds$$

$$= -\frac{d\,(N \cdot \Phi)}{dt}$$

N = Nb de spires

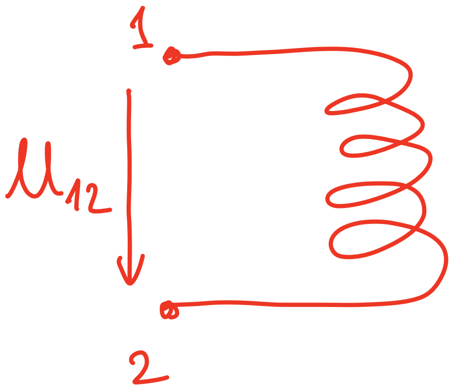
Φ = Flux mag.

Définition : $N \cdot \Phi$ = Flux totalisé

$= \psi$ (Psi)

$$\oint E\,dl = -\frac{d\psi}{dt}$$

1.7 Loi de la tension induite :



$$\oint E\,dl = \int_1^2 E\,dl + \int_2^1 E\,dl$$

$$= \int_1^2 \rho \cdot J\,dl - u_{12}$$

$$= R_{12} \cdot i - u_{12} = -\frac{d\psi}{dt}$$

$$\boxed{u_{12} = R_{12} \cdot i + \frac{d\psi}{dt}}$$